

Supponiamo $\ker f$ banale e $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n)$ nq. libera

di V . Se $f(A) = (f(\bar{a}_1) \dots f(\bar{a}_n))$ è zero $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^* \text{ tali che } (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 \dots 0)$$

$$\text{e } \alpha_1 f(\bar{a}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{a}_n) = 0$$

"

$$f(\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n) \Rightarrow \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n \in \ker f = \{0\}.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = 0 \text{ by poché } A \text{ libera.}$$

viceversa: Se $\ker f \neq \{0\} \Rightarrow \exists \bar{b} \neq 0$ con $\bar{b} \in \ker f$.

$$(\bar{b}) \text{ è una seq. libera di } V \text{ e } f(\bar{b}) = 0$$

è una seq. zero di W .

3) Siano $(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n)$ generatori per $V \Rightarrow$

$$\forall \bar{v} \in V \exists \lambda \text{ s.t. } \bar{v} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n \Rightarrow f(\bar{v}) = f(\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n)$$

$$= \lambda_1 f(\bar{a}_1) + \dots + \lambda_n f(\bar{a}_n) \Rightarrow (f(\bar{a}_1) \dots f(\bar{a}_n))$$

generano $\text{Im } f$.

□

05:1) Sia $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di V
 $B' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m)$ una base di W
 allora una funzione lineare $f: V \rightarrow W$
 è univocamente determinata dai valori:

$f(\bar{e}_i) \dots f(\bar{e}_n)$ e dalla base B
 In quanto $\forall \bar{v} \in V \exists! (a_1 \dots a_n) \in K^n$:
 $\bar{v} = a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n$

$$e \quad f(\bar{v}) = \underbrace{a_1 f(\bar{e}_1)} + \dots + \underbrace{a_n f(\bar{e}_n)}$$

$$[f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$f(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1' + a_{12}\bar{e}_2' + \dots + a_{m1}\bar{e}_m'$$

$$f(\bar{e}_2) = a_{21}\bar{e}_1' + a_{22}\bar{e}_2' + \dots + a_{m2}\bar{e}_m'$$

$$\vdots$$

$$f(\bar{e}_m) = a_{m1}\bar{e}_1' + a_{m2}\bar{e}_2' + \dots + a_{mn}\bar{e}_n'$$

$$\text{dim } W \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{dim } W \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$f(\bar{e}_1)$ $f(\bar{e}_n)$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{dim } V}$$

2) Se $\text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow f: V \rightarrow W$ manda basi di V in basi di W e quindi $\text{Im } f = W$.

In particolare

- $\dim \text{Im } f = \dim V$

- $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim V$

Dim di nullità + rango.

Se $\text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow$ vedi sopra
 Se $\text{Ker } f \neq \{0\} \Rightarrow$ sia $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t)$ una base di $\text{Ker } f$
 e sia $(\bar{e}_{t+1}, \dots, \bar{e}_n)$ una base di V
 Otteniamo completando $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t)$ a base.

$$\text{Im } f = \mathcal{L}(\underbrace{f(\bar{e}_{t+1}), \dots, f(\bar{e}_n)}_0, \dots, f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_t)) = \mathcal{L}(f(\bar{e}_{t+1}), \dots, f(\bar{e}_1))$$

MOSTRIAMO CHE $f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_{n-t})$ è libero.

In fatti se fosse legato $\exists d_2 \dots d_{n-t}$ tali che $\alpha_i \neq 0$

$$\alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + d_{n-t} f(\bar{e}_{n-t}) = 0$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + d_{n-t} \bar{e}_{n-t}) = 0$$

$$= d_1 \bar{e}_1 + \dots + d_{n-t} \bar{e}_{n-t} \in \ker f = L(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t)$$

e siamo in $d_i \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ una c. lineare a coeff. non tutti $= 0$

tale da

$$\beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_t \bar{e}_t = d_1 \bar{e}_1 + \dots + d_{n-t} \bar{e}_{n-t}$$

$\Rightarrow$ la sequenza $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-t})$

verrebbe legata, perché è base.

$$\dim \operatorname{Im} f = n - t = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f \rightarrow$$

$$\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f}$$

□

riassunto: se $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V$ □

altrimenti: prendere una base di $\operatorname{Ker} f$ ($\dim \operatorname{Ker} f = t$). Completarla a base di V con $n-t$ vettori. È vedere che le immagini di $n-t$ vettori aggiunt. generano $\operatorname{Im} f$ e sono indipendenti. □

N.B.: Si può usare per l'im. la formula di Grassmann.

$$\pi: M \times W \rightarrow M+W$$

$$(\bar{u}, \bar{w}) \rightarrow \bar{u} + \bar{w}$$

$$\dim U \times W = \dim U + \dim W$$

$$\dim U + W = \dim \operatorname{Im} \pi$$

$$\ker \pi = \{ (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \mid \bar{u} + \bar{w} = \bar{0} \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, -u) \in U \times W \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) \mid \bar{u} \in U \}.$$

$$\dim \ker \pi = \dim U.$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim U + W = \dim U \times W$$

$$- \dim \ker f =$$

$$= \dim U + \dim W - \dim U \times W \quad \square$$

Siano V, W spazi vettoriali su K .

$f: V \rightarrow W$ lineare

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$$

$$f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}).$$

- $\text{Im } f \leq W$ • $\text{Ker } f = \{ \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{0} \} \leq V$
- Se $A = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ di generatori per $V \Rightarrow f(A)$ di gen. per W .
- Se $A = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ libera in V e $\text{Ker } f = \{ \bar{0} \} \Rightarrow f(A)$ libera in W
- $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim V$.
- $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Leftrightarrow \bar{y} \in \bar{x} + \text{Ker } f$.
 - $\rightarrow$ In particolare $f: V \rightarrow \text{Im } f$ è biiettivo (e quindi isomorfismo) $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{ \bar{0} \}$.
- $f: V \rightarrow W$ isomorfismo $\Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \dim V = \dim W$.
- f isomorfismo $\Rightarrow f$ manda basi di V in basi di W .

$$p - x$$

$$0 = p + x$$

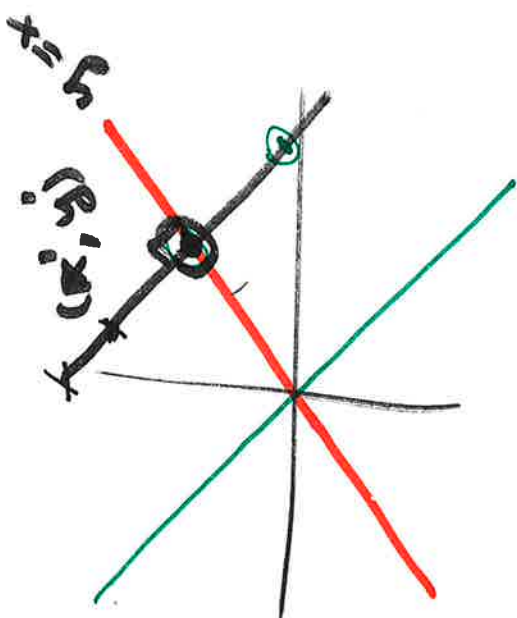
$$\frac{1}{2} p + x = x$$

$$(x, p) = (x, x - x)$$

$$(p, p) = (x, x - x)$$

$$p = x$$

$$p = x$$

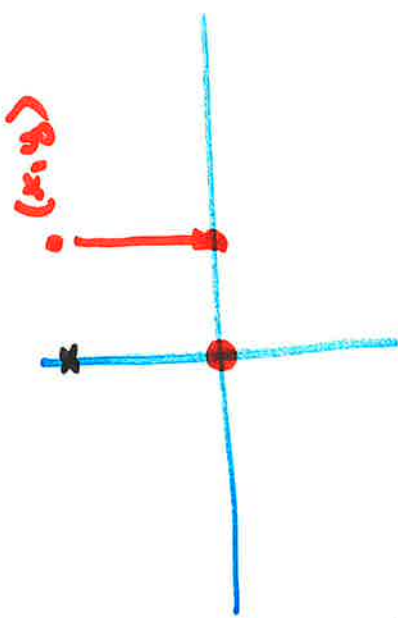


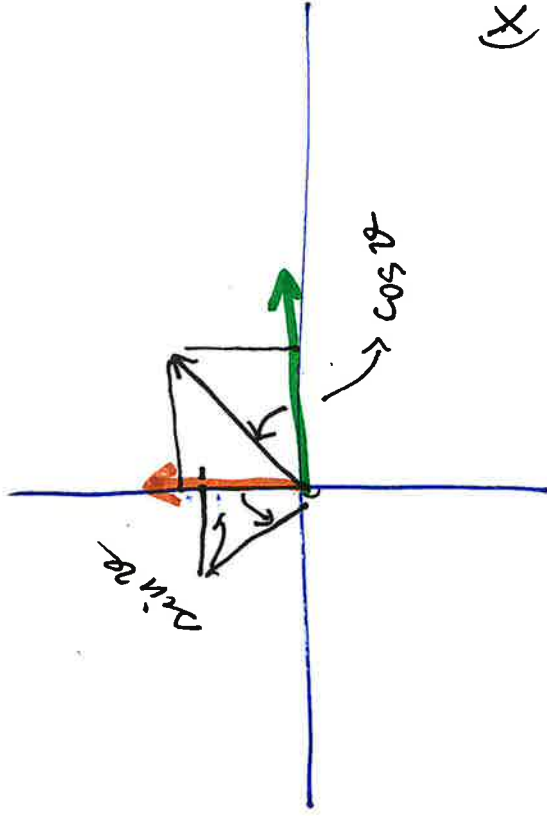
$$(p, x) = (-x, y)$$

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x, 0)$$





$\mathbb{R}^2$ (10)

(01)

$$f((1,0)) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$$

$$f((0,1)) = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

$$(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

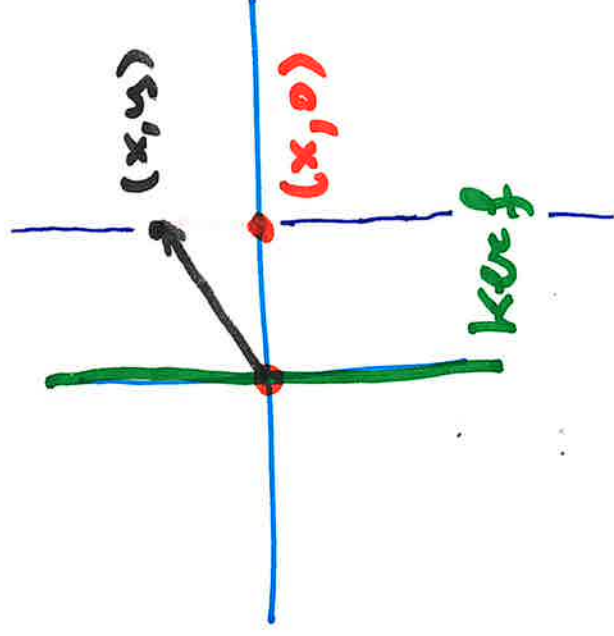
$$(x, y) \rightarrow (x, 0)$$

$$\text{Ker } f = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, 0) + \text{Ker } f$$

N.B. codom. $\mathbb{R}^2$

$$\text{Im } f = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

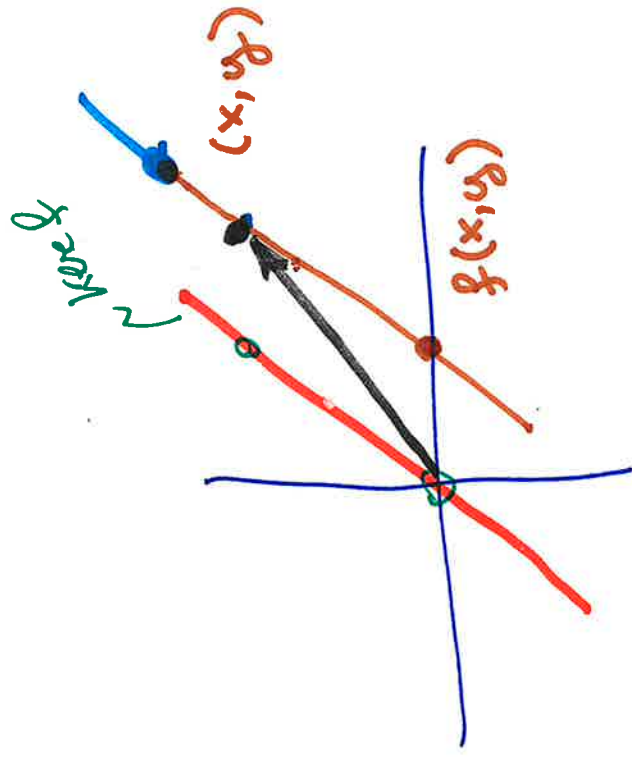


piatto in $\mathbb{R}^3$ $x=0$

$$f: (x, y, z) \rightarrow (0, y, z)$$

$$\text{Ker } f = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Ad ogni (x, y, z) associo il punto di $\pi: x=0$
 in direzione della rotta di direzione $(0, u, u)$ per
 (x, y, z)



DISTINZIONE FRA vettori e vettori: i componenti:

$$\bar{v} \in V_n(K)$$

$\hookrightarrow$ rispetto una base $\in K^n$

Le componenti dipendono dal riferimento fisso.

$$\bar{e}_1'' = (-1, -2) \rightarrow \bar{V} \text{ has comp. } (2, 0)$$

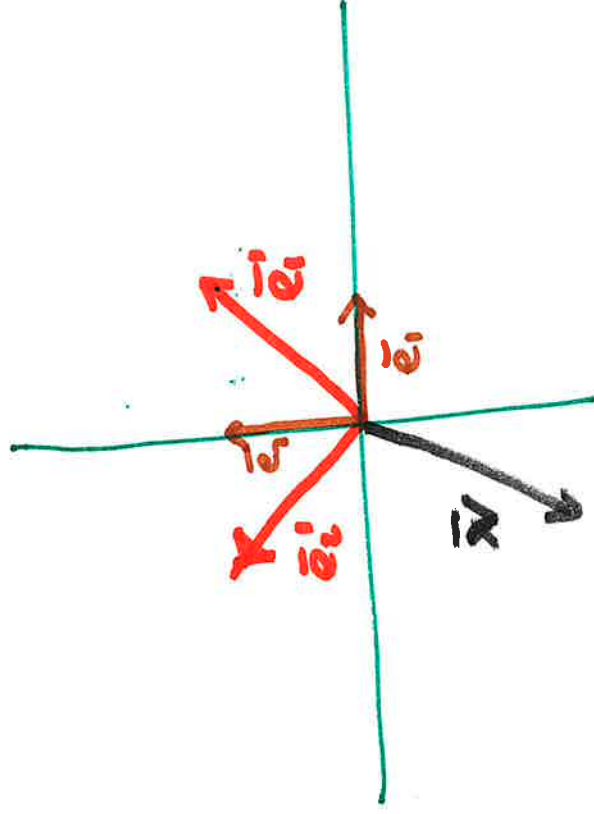
$$\bar{e}_2'' = (0, 1)$$

$$\rightarrow \bar{e}_1 = (1, 0)$$

$$\uparrow \bar{e}_2 = (0, 1)$$

$$\bar{e}_1' = (1, 1)$$

$$\bar{e}_2' = (-1, 1)$$



$$\bar{V} = (-1, -2)$$

$$\bar{V} = -1\bar{e}_1 + -2\bar{e}_2$$

$$\bar{V} = (-1, -2) = \alpha(1, 1) + \beta(-1, 1)$$

$$\bar{V} = (-1, -2) =$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = -1$$

$$\alpha + \beta = -2$$

$$\alpha = \beta - 1$$

$$2\beta - 1 = -2 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

the components

$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ rispetto $\bar{e}_1, \bar{e}_2$

rispetto $\bar{e}_1, \bar{e}_2$

ha comp. $(-1, -2)$

Sia V_n uno sp. vettoriale f.g. di dimensione n .

Siano $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $B' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ due me basi.

$\Rightarrow$ esistono $a_{11} \dots a_{1n}, \dots, a_{n1} \dots a_{nn}$ tali che

$$\bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$$

$$\bar{e}'_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n$$

$\vdots$

$$\bar{e}'_n = a_{n1}\bar{e}_1 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

$\uparrow$
Vettori
di B'

rispetto a B .

$$\begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} \quad {}^T A$$

$${}^T A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$E' = {}^T A E$

↑ vettori di $\mathcal{B}_3$ ↑ vettori di $\mathcal{B}_3$

Sia $\bar{v}$ un vettore di $V_n(k)$

$\Rightarrow \bar{v}$ è com. lineare di vettori di $\mathcal{B}_3$.
e si può scrivere come

$$\bar{v} = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = {}^T E X$$

$$\bar{v} = [\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = {}^T E' X'$$

$${}^T E X = {}^T E' X' \quad E' = {}^T A E$$

$${}^T E X = {}^T ({}^T A E) X' = ({}^T E A) X' = {}^T E (A X').$$

$$\Rightarrow \underline{X = A X'} \quad \text{cambiamento di base da } B_3' \text{ a } B_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrice di cambiamento di base

colonne: componenti dei vettori di B_3' rispetto a B_3 .

